

Modélisation du FRC à court terme

21 décembre 2022

L'objectif de ce document est de proposer une modélisation du FRC à court terme et d'en déduire quelques applications. Dans ce modèle, les dépenses ordinaires, d'équipement ainsi que les recettes sont vues de manière agrégée avec une dynamique qui leur est propre. Cette modélisation, très simple, permet de comprendre la dynamique du FRC et l'évolution de son risque. Une modélisation consistant à décomposer les recettes et les dépenses dans une granularité plus fine et en fonction d'un certain nombre de facteurs macro permettrait d'avoir un modèle plus robuste et de simuler une trajectoire du FRC pour un scénario macro-économique donné.

Notations

Dans toute la suite on désigne par *FRC* la partie réellement liquide du FRC et on note :

F_n la valeur du FRC à la fin de l'année n

R_n la valeur des recettes de l'année n

O_n la valeur des dépenses ordinaires de l'année n

E_n la valeur des dépenses d'équipement de l'année n

E_n^{prim} la valeur des dépenses d'équipement prévues pour l'année n par le budget primitif

$E_{n+i}^{tri(n)}$ la valeur des dépenses d'équipement prévues pour l'année $n+i$ par le plan triennal de l'année n pour $i \in \{0, 1, 2\}$

Δ la valeur moyenne des dépenses d'équipement qui n'apparaissent pas dans le plan triennal

B_n la valeur du résultat budgétaire de l'année n :

$$B_n = R_n - O_n - E_n$$

r_{n+1}^X la valeur du rendement de la quantité X entre les années n et $n+1$ dans le sens

$$r_{n+1}^X = \frac{X_{n+1}}{X_n} - 1$$

1 Modélisation

L'objectif de cette section est de modéliser la valeur terminale du FRC pour deux horizons différents : 1 an et 3 ans. Pour cela, il faut au préalable définir la comptabilité du fonds et modéliser l'aléa.

1.1 Comptabilité

Dans toute la suite on suppose que la comptabilité du FRC est pilotée par la Constitution qui impose que le résultat budgétaire est affecté au FRC à la clôture de l'exercice, i.e. :

$$F_{n+1} = F_n (1 + r_{n+1}^F) + B_{n+1} \quad (1)$$

On en déduit une expression approchée de F_{n+3} :

$$F_{n+3} \approx F_n \prod_{i=1}^3 (1 + r_{n+i}^F) + \sum_{i=1}^3 B_{n+i} \quad (2)$$

Il faut à présent définir la politique de l'Etat concernant le résultat budgétaire. Le principe retenu dans toute la suite est que lorsque les recettes excèdent les dépenses prévues, l'Etat dépense tout l'excédent dans de nouvelles dépenses d'équipement. A l'inverse, lorsque les recettes sont inférieures aux dépenses prévues, l'Etat dépense quand même les dépenses prévues (en prélevant au FRC pour financer le manque de recettes nécessaires). Techniquement, on distingue les deux horizons 1 an et 3 ans de la manière suivante.

Horizon de 1 an On spécifie que :

- si les recettes sont meilleures que celles prévues au budget primitif, i.e.

$$R_{n+1} > O_{n+1} + E_{n+1}^{prim}$$

alors comme l'Etat dépense toutes les recettes excédentaires, i.e. $R_{n+1} - O_{n+1} - E_{n+1}^{prim}$, en nouvelles dépenses d'équipement, cela signifie que

$$E_{n+1} = R_{n+1} - O_{n+1}, \text{ soit } B_{n+1} = 0$$

- si les recettes sont moins bonnes que celles prévues au budget primitif, i.e.

$$R_{n+1} < O_{n+1} + E_{n+1}^{prim}$$

alors comme l'Etat dépense quand même les recettes qu'il avait prévu de dépenser au budget primitif, i.e.

$$E_{n+1} = E_{n+1}^{prim}$$

cela signifie que

$$B_{n+1} := R_{n+1} - O_{n+1} - E_{n+1} = R_{n+1} - O_{n+1} - E_{n+1}^{prim} < 0$$

En résumé :

$$B_{n+1} = \min \left(R_{n+1} - O_{n+1} - E_{n+1}^{prim}, 0 \right) \quad (3)$$

Horizon de 3 ans On spécifie que :

- si les recettes R_{n+i} pour $i \in \{1, 2, 3\}$ sont meilleures que celles prévues au plan triennal, i.e.

$$R_{n+i} > O_{n+i} + E_{n+i}^{tri(n+1)} + \Delta$$

alors comme l'Etat dépense toutes les recettes excédentaires, i.e. $R_{n+i} - O_{n+i} - E_{n+i}^{tri(n+1)} - \Delta$ en nouvelles dépenses d'équipement, cela signifie que

$$E_{n+i} = R_{n+i} - O_{n+i}, \text{ soit } B_{n+i} = 0$$

- si les recettes sont moins bonnes que celles prévues au plan triennal, i.e.

$$R_{n+1} < O_{n+1} + E_{n+1}^{tri(n+1)} + \Delta$$

alors comme l'Etat dépense quand même les recettes qu'il avait prévu de dépenser au plan triennal, i.e.

$$E_{n+i} = E_{n+i}^{tri(n+1)} + \Delta$$

cela signifie que

$$B_{n+i} := R_{n+i} - (O_{n+i} + E_{n+i}) = R_{n+i} - (O_{n+i} + E_{n+i}^{tri(n+1)} + \Delta) < 0$$

En résumé, pour $i \in \{1, 2, 3\}$:

$$B_{n+i} = \min \left(R_{n+i} - O_{n+i} - E_{n+i}^{tri(n+1)} - \Delta, 0 \right) \quad (4)$$

A présent nous devons modéliser l'aléa.

1.2 Aléa

Pour modéliser l'aléa, on suppose dans toute la suite que pour tout $X \in \{F, R, O\}$ et $n > n_0$:

$$r_n^X = \mu_X + \sigma_X \varepsilon_n^X \quad (5)$$

où, en notant $\varepsilon_n := (\varepsilon_n^F, \varepsilon_n^R, \varepsilon_n^O)$, on suppose que :

- les $(\varepsilon_n)_{n > n_0}$ sont i.i.d.
- $\varepsilon_n^F, \varepsilon_n^R$ et ε_n^O suivent une $\sim \mathcal{N}(0, 1)$

— la matrice de corrélation de ε_n est de la forme

$$C = \begin{pmatrix} 1 & \rho & 0 \\ \rho & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

le paramètre ρ permettant de refléter la corrélation non nulle (et positive) entre les recettes de l'Etat et l'évolution des marchés financiers

Cette formulation de l'aléa est très simpliste et mériterait un certain nombre de raffinements. Mais elle permet de simuler aisément la valeur terminale du FRC et ainsi illustrer le mécanisme général des finances publiques de Monaco.

1.3 Valeur terminale du FRC pour différents horizons

La distribution de F_{n+1} (respectivement de F_{n+3}) lorsqu'on se place à la fin de l'année n est alors obtenue en combinant alors les équations (1) et (3) (respectivement (2) et (4)) :

$$\begin{aligned} F_{n+1} &= F_n \left(1 + r_{n+1}^F\right) + \min \left(R_n \left(1 + r_{n+1}^R\right) - O_n \left(1 + r_{n+1}^O\right) - E_{n+1}^{prim}, 0 \right) \\ F_{n+3} &\approx F_n \prod_{i=1}^3 \left(1 + r_{n+i}^F\right) \\ &\quad + \sum_{i=1}^3 \min \left(R_{n-1+i} \left(1 + r_{n+i}^R\right) - O_{n-1+i} \left(1 + r_{n+i}^O\right) - E_{n+i}^{tri(n+1)} - \Delta, 0 \right) \end{aligned}$$

où la loi des $(r_{n+i}^F, r_{n+i}^R, r_{n+i}^O)$ est donnée par (5).

2 Applications

Cette modélisation permet de simuler une trajectoire de FRC pour les 3 prochaines années puisqu'on dispose de la dynamique du FRC à un horizon de 3 ans. Bien sûr, une trajectoire simulée unique n'a aucun intérêt. En revanche, simuler de nombreuses trajectoires permet d'estimer la valeur espérée de la valeur du FRC à un horizon de 1, 2 ou 3 ans, ou encore (et c'est le plus intéressant), la dispersion de cette valeur à l'horizon donné.

Pour estimer la dispersion de la valeur du FRC à un horizon de x années, on peut par exemple estimer les quantiles d'ordre α et $1 - \alpha$ (par exemple pour $\alpha = 0.05$) de la variable aléatoire F_{n+x} , connaissant toute l'information disponible à la fin de l'année n , formellement les quantités

$$\begin{aligned} q_{n,x}(\alpha) &:= f_{n,x}^{-1}(\alpha) \\ q_{n,x}(1 - \alpha) &:= f_{n,x}^{-1}(1 - \alpha) \end{aligned}$$

où $f_{n,x}$ est la fonction de répartition de la variable aléatoire F_{n+x} conditionnellement à l'information disponible à la fin de l'année n .